2 恒等式・割り算の問題

A

8

$x-2y+z=4$ より，$z=4-x+2y$ ・・・①

これを $2x+y-3z=-7$ に代入し，整理すると，$5x-5y=5$ $\therefore y=x-1$ ・・・②

②を①に代入し，整理すると，$z=x+2$ ・・・③

②，③を $ax^2+2by^2+3cz^2=18$ に代入し，左辺を x について整理すると，

$(a+2b+3c)x^2+(-4b+12c)x+2b+12c=18$

これは x の恒等式だから，$\begin{cases} a+2b+3c=0 \\ -4b+12c=0 \\ 2b+12c=18 \end{cases}$ これを解くことにより，$a=-9,\ b=3,\ c=1$

9

与式を x について降べきの順に整理すると，$x^2-(y-a)-2y^2-y+1$

ここで，$x^2-(y-a)-2y^2-y+1=0$ を x についての 2 次方程式とみなすと，

解の公式により，

$$x=\frac{y-a\pm\sqrt{\{-(y-a)\}^2-4(-2y^2-y+1)}}{2}$$

$$=\frac{y-a\pm\sqrt{9y^2-2(a-2)y+a^2-4}}{2}$$

よって，

$$x^2-(y-a)-2y^2-y+1$$
$$=\left(x-\frac{y-a+\sqrt{9y^2-2(a-2)y+a^2-4}}{2}\right)\left(x-\frac{y-a-\sqrt{9y^2-2(a-2)y+a^2-4}}{2}\right)$$

これが 1 次式の積であるならば，$\sqrt{9y^2-2(a-2)y+a^2-4}$ は 1 次式である。

このとき $9y^2-2(a-2)y+a^2-4=0$ は重解をもつから，

判別式を D とすると，

$D=0$ および $\dfrac{D}{4}=\{-(a-2)\}^2-9(a^2-4)=-4(2a^2+a-10)$ より，$2a^2+a-10=0$

これと $2a^2+a-10=(2a+5)(a-2)$ より，$a=-\dfrac{5}{2},\ 2$

逆に $a=-\dfrac{5}{2},\ 2$ のとき，$x^2-(y-a)-2y^2-y+1$ は 1 次式の積に因数分解できる。

よって，$a=-\dfrac{5}{2},\ 2$

10

$f(x)$ を $x^2+\alpha$ で割った余り

割り算を実行すると，$f(x)=(x^2+\alpha)(x^2+2x-\alpha+10)+2(5-\sqrt{2}-\alpha)x+\alpha^2-10\alpha+23$

よって，余りは $2(5-\sqrt{2}-\alpha)x+\alpha^2-10\alpha+23$

$f(x)$ を実数の範囲で因数分解

$f(x)=(x^2+\alpha)(x^2+2x-\alpha+10)+2(5-\sqrt{2}-\alpha)x+\alpha^2-10\alpha+23$ において，

余り $2(5-\sqrt{2}-\alpha)x+\alpha^2-10\alpha+23$ が 0 となる α が，

すなわち $5-\sqrt{2}-\alpha=0$ かつ $\alpha^2-10\alpha+23=0$ を満たす α が存在すればよく，

このとき $f(x)$ は実数の範囲で因数分解され，$f(x)=(x^2+\alpha)(x^2+2x-\alpha+10)$ となる。

そこで，連立方程式 $\begin{cases}5-\sqrt{2}-\alpha=0\\ \alpha^2-10\alpha+23=0\end{cases}$ を解くと，

$5-\sqrt{2}-\alpha=0$ の解は $\alpha=5-\sqrt{2}$，$\alpha^2-10\alpha+23=0$ の解は $\alpha=5\pm\sqrt{2}$ だから，$\alpha=5-\sqrt{2}$

これを $f(x)=(x^2+\alpha)(x^2+2x-\alpha+10)$ に代入すると，

$f(x)=(x^2+5-\sqrt{2})(x^2+2x+5+\sqrt{2})$　$\therefore (x^2+5-\sqrt{2})(x^2+2x+5+\sqrt{2})$

11

$A,\ B$ は t についての 2 次方程式 $t^2-(A+B)t+AB=0$　・・・①　の解である。

条件より，$4x^3-2x^2-9x+7=AB+x+1$　$\therefore AB=4x^3-2x^2-10x+6$　・・・②

また，$A+B=2x^2+4x-5$　・・・③

②，③を①に代入すると，

$t^2-(2x^2+4x-5)t+4x^3-2x^2-10x+6=0$

解の公式により，

$$t=\frac{2x^2+4x-5\pm\sqrt{\{-(2x^2+4x-5)\}^2-4(-2x^2-10x+6)}}{2}$$
$$=\frac{2x^2+4x-5\pm(2x^2+1)}{2}$$
$$=2x^2+2x-2,\ 2x-3$$

また，$4x^3-2x^2-9x+7$ を多項式 A で割った余りが $x+1$ であることから，

多項式 A の次数は 1 より大きい。

よって，$A=2x^2+2x-2,\ B=2x-3$

12

$x=1$ のとき

$-7f(2)=0$ より，$f(2)=0$ ・・・①

$x=2$ のとき

$-6f(4)=8f(2)$

これと①より，$f(4)=0$ ・・・②

$x=4$ のとき

$-4f(8)=24f(4)$

これと②より，$f(8)=0$ ・・・③

①，②，③および $f(x)$ の x^3 の係数が 1 であることから，

$f(x)=(x-2)(x-4)(x-8)$

$=x^3-14x^2+56x-64$

逆に，$f(x)=(x-2)(x-4)(x-8)$ とすると，

$(x-8)f(2x)=(x-8)(2x-2)(2x-4)(2x-8)=8(x-8)(x-1)(x-2)(x-4)$

$8(x-1)f(x)=8(x-1)(x-2)(x-4)(x-8)$ となり，すべての実数 x に対して

$(x-8)f(2x)=8(x-1)f(x)$ を満たす。

よって，$f(x)=x^3-14x^2+56x-64$

13

$P(x)$ を $(x+1)^2(x-2)$ で割った商を $A(x)$，余りを ax^2+bx+c とすると，

$P(x)=(x+1)^2(x-2)A(x)+ax^2+bx+c$ ・・・① と表される。

また，$P(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りが $5x+2$ であることから，

余り ax^2+bx+c は $a(x+1)^2+5x+2$ ・・・② と表せる。

よって，①，②より，$P(x)=(x+1)^2(x-2)A(x)+a(x+1)^2+5x+2$ ・・・③

$x-2$ で割ると 3 余ることから，$P(2)=3$ ・・・④

③，④より，$(2+1)^2(2-2)A(2)+a(2+1)^2+5\cdot 2+2=3$ $\therefore a=-1$

これを②に代入し，整理することにより，求める余りは $-x^2+3x+1$

B

14

$f(0)=1$ より，$f(x)=ax^2+bx+1$ とおくと，$f(x^2)=ax^4+bx^2+1$

したがって，$f(x^2)$ を $f(x)$ で割った商を x^2+cx+1 とおくと，

$ax^4+bx^2+1=(ax^2+bx+1)(x^2+cx+1)$

すなわち $ax^4+bx^2+1=ax^4+(ac+b)x^3+(a+bc+1)x^2+(b+c)x+1$

これは x についての恒等式だから，

$ac+b=0$ ・・・①

かつ

$a+bc+1=b$ ・・・②

かつ

$b+c=0$ ・・・③

③より，$b=-c$ ・・・④

④を①，②に代入し，それぞれを整理すると，

$c(a-1)=0$ ・・・⑤

かつ

$c^2-c-a-1=0$ ・・・⑥

⑤より，$c=0$ または $a=1$

したがって，

$c=0$ のとき

④より $b=0$，⑥より $a=-1$

$a=1$ のとき

⑥を整理すると，$(c+1)(c-2)=0$

これと④より，$(b,\ c)=(1,\ -1),\ (-2,\ 2)$

よって，$(a,\ b,\ c)=(-1,\ 0,\ 0),\ (1,\ 1,\ -1),(1,\ -2,\ 2)$

ゆえに，$f(x)$ は $-x^2+1,\ x^2+x+1,\ x^2-2x+1$

補足

$f(x^2)$ を $f(x)$ で割りし，余りが 0 となるような $a,\ b$ を求めてもよい。

15

商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと，$(x^5+1)^2=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b$ ・・・①

$x^2+x+1=0$ の解は虚数解で，その 1 つを ω とすると，$\omega^2+\omega+1=0$ ・・・②

また，$\omega^2+\omega+1=0$ より，$\omega(\omega^2+\omega+1)=\omega^3+(\omega^2+\omega)=\omega^3-1=0$ $\therefore \omega^3=1$ ・・・③

$x=\omega$ のとき

①の左辺は，②，③より，

$$\begin{aligned}(\omega^5+1)^2&=\{\omega^3\cdot\omega^2+(-\omega^2-\omega)\}^2\\&=(\omega^2-\omega^2-\omega)^2\\&=\omega^2\\&=-\omega-1\end{aligned}$$

①の右辺は，②より，

$(\omega^2+\omega+1)Q(\omega)+a\omega+b=a\omega+b$

よって，$-\omega-1=a\omega+b$ $\therefore (a+1)\omega+b+1=0$

ω は虚数だから，$a=-1,\ b=-1$

ゆえに，余りは $-x-1$

16

解法 1

$P(x)$ を $x(x-1)$ で割った商を $A(x)$，余りを $ax+b$ とすると，$P(x)=x(x-1)A(x)+ax+b$

よって，$P(0)=b$，$P(1)=a+b$

これと $P(0)=1$，$P(1)=2$ より，$b=1,\ a+b=2$ $\therefore a=b=1$

ゆえに，$P(x)=x(x-1)A(x)+x+1$

これより，

$$\begin{aligned}P(x)&=x(x-1)A(x)+x+1\\&=\{(x-2)(x+1)+2\}A(x)+(x-2)+3\\&=(x-2)(x+1)A(x)+(x-2)+2A(x)+3\\&=(x-2)\{(x+1)A(x)+1\}+2A(x)+3\end{aligned}$$

よって，$P(2)=2A(2)+3$

これと $P(2)=0$ より，$2A(2)+3=0$ $\therefore A(2)=-\dfrac{3}{2}$

ここで，$A(x)$ を定数とすると，$A(x)=-\dfrac{3}{2}$

よって，$P(x)=x(x-1)\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)+x+1=-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{5}{2}x+1$

最高次の係数が 1 でないから，不適

$A(x)=x+\alpha$ とすると，$A(2)=2+\alpha$ より，$2+\alpha=-\frac{3}{2}$ すなわち $\alpha=-\frac{7}{2}$　$\therefore A(x)=x-\frac{7}{2}$

よって，

$$P(x)=x(x-1)\left(x-\frac{7}{2}\right)+x+1$$
$$=x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x+1$$

これは最高次の係数が 1 であることを満たす。

ゆえに，条件を満たす整式 $P(x)$ で最も次数の低いものは $P(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x+1$

解法 2

ポイント

$P(2)=0,\ P(0)=1,\ P(1)=2$ の 3 つしかないから，

$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$ とおいて，

$n=0$ から順に調べればすぐ見つかる。

解

$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$ とすると，

$P(0)=1$ より，$a_0=1$

よって，$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+1$

$n=0$ のとき

$P(x)=1$

これは $P(2)=0,\ P(1)=2$ を満たさない。よって，不適

$n=1$ のとき

$P(x)=x+1$

これは $P(2)=0$ を満たさない。よって，不適

$n=2$ のとき

$P(x)=x^2+a_1x+1$

$P(2)=0$ より，$4+2a_1+1=0$ すなわち $a_1=-\frac{5}{2}$

よって，$P(x)=x^2-\frac{5}{2}x+1$

ところが，これは $P(1)=2$ を満たさない。よって，不適

$n=3$ のとき

$P(x)=x^3+a_2x^2+a_1x+1$

$P(2)=0$ より，$8+4a_2+2a_1+1=0$　$\therefore 2a_1+4a_2=-9$　・・・①

$P(1)=2$ より，$1+a_2+a_1+1=2$　$\therefore a_1+a_2=0$　・・・②

①かつ②より，$a_1=\dfrac{9}{2},\ a_2=-\dfrac{9}{2}$

よって，$P(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+\dfrac{9}{2}x+1$

ゆえに，最も次数の低い$P(x)$は$P(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+\dfrac{9}{2}x+1$

17

(1)

解法 1

多項式$f(x)$が$x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$を満たすことから，$x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)$は多項式である。

よって，$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\ (a_n\neq 0)$とおくと，

$x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)$が多項式であるためにはその最も次数の低い項の次数が0以上であることが必要。

これと，最も次数の低い項の次数は，$x^4\cdot a_nx^{-n}=a_nx^{4-n}$より，$4-n$であることから，

$4-n\geq 0$すなわち$n\leq 4$

よって，$f(x)$の次数は4以下である。

解法 2

$f(x)$の次数をn，最も次数の低い項の次数を$n-m\ (0\leq m\leq n)$とすると，

恒等式$x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$において，左辺の次数は$4+\{-(n-m)\}=4-n+m$

これと右辺$f(x)$の次数がnであることから，$4-n+m=n\quad\therefore n=\dfrac{m+4}{2}$

また，$0\leq m\leq n$より，$2\leq\dfrac{m+4}{2}\leq\dfrac{n+4}{2}$

よって，$2\leq n\leq\dfrac{n+4}{2}$より，$n=2,\ 3,\ 4$

ゆえに，$f(x)$の次数は4以下である。

(2)

(1)より，$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$とおく。

すると，(A)の恒等式は$x^4\left\{a\left(\dfrac{1}{x}\right)^4+b\left(\dfrac{1}{x}\right)^3+c\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+d\cdot\dfrac{1}{x}+e\right\}=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

すなわち$ex^4+dx^3+cx^2+bx+a=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\quad\therefore a=e,\ b=d$

よって，$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+bx+a\quad$・・・①

(B)の恒等式は，①より，

$a(1-x)^4+b(1-x)^3+c(1-x)^2+b(1-x)+a=ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$

これに，$x=0$ を代入すると，$a+b+c+b+a=a$　$\therefore a+2b+c=0$　・・・②

$x=-1$ を代入すると，$16a+8b+4c+2b+a=a-b+c-b+a$　$\therefore 5a+4b+c=0$　・・・③

また，(C)については，①より，$a+b+c+b+a=1$　$\therefore 2a+2b+c=1$　・・・④

②，③，④の連立方程式を解くことにより，$a=1,\ b=-2,\ c=3$

これを①に代入することにより，$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$

逆に，$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$ とすると，(A),(B),(C)が成り立つ。

よって，$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$

18

解法 1

$P(x)$ を $Q(x)$ で割った商を $A(x)$，余りを $ax+b$（$a,\ b$ の少なくとも一方は 0 でない）

とすると，$P(x)=Q(x)A(x)+ax+b$ より，

$$
\begin{aligned}
\{P(x)\}^2 &= \{Q(x)A(x)+ax+b\}^2 \\
&= \{Q(x)A(x)\}^2+2Q(x)A(x)(ax+b)+(ax+b)^2 \\
&= Q(x)\left[Q(x)\{A(x)\}^2+2(ax+b)A(x)\right]+(ax+b)^2
\end{aligned}
$$

ここで，$(ax+b)^2$ については，$\{P(x)\}^2$ は $Q(x)$ で割り切れることから，

定数 k を用いて $(ax+b)^2=kQ(x)$ と表せる。

よって，$(ax+b)^2$ は 2 次式で，$Q(x)=\dfrac{1}{k}(ax+b)^2$

ゆえに，$Q(x)=0$ は重解 $-\dfrac{b}{a}$ をもつ。

解法 2

$Q(x)=0$ が重解をもたないと仮定する。

つまり，異なる 2 つの解 $\alpha,\ \beta$ をもつと仮定すると，

$Q(x)$ は 0 でない実数 a を用いて $Q(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ と表せる。

これと $\{P(x)\}^2$ が $Q(x)$ で割り切れることから，

因数定理により，$\{P(\alpha)^2\}=0,\ \{P(\beta)\}^2=0$

よって，$P(\alpha)=P(\beta)=0$

ところが，$P(x)$ は $Q(x)$ で割り切れない。

すなわち $P(\alpha)\neq 0$ または $P(\beta)\neq 0$ である。

したがって，$Q(x)=0$ が重解をもたないと仮定する矛盾が生じる。

ゆえに，$Q(x)=0$ は重解をもつ。